Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 9 Abgabeschluss: 16.12.2019

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)
Geben sie Lösungsvorschläge für die folgenden Probleme an und zeigen sie, wie man überprüfen kann, ob sie tatsächlich eine Lösung sind. Einen Lösungsvorschlag, der die Püfung übersteht, nennt man Zertifikat.

a) Gibt es einen Weg[1] der Länge *höchstens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen?

   Ich hätte gern folgende Antwort: Der Lösungsvorschlag ist eine Folge von Knoten. Man überprüft, dass die Folge mit u beginnt und mit v aufhört, dass je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind, und dass die Folge aus höchstens $k+1$ Knoten besteht.

b) Gibt es einen einfachen Weg der Länge *mindestens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen? Ein Weg heißt einfach, wenn kein Knoten darin zweimal vorkommt.

c) Gegeben einen Graphen G, kann man G auf ein Blatt Papier zeichnen, ohne dass sich Kanten kreuzen?

d) Gegeben ein Graph G und eine Zahl k, gibt es eine Teilmenge S der Knoten der Größe k, so dass alle Knoten in S paarweise durch eine Kante verbunden sind? Man nennt eine solche Teilmenge eine *Clique*.

e) Gegeben ein Graph G und eine Zahl k, gibt es eine Teilmenge S der Knoten der Größe k, so dass jeder Knoten, der nicht in S liegt, mit einem Knoten in S verbunden ist.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Wir lernen einen *Approximationsalgorithmus* kennen. Ein solcher Algorithmus findet eine Lösung mit garantierter Qualität; in unserem Fall liegen die Kosten der approximativen Lösung um höchstens 100% über den Kosten der optimalen Lösung.

Sie sind der Manager für zwei identische Arbeiter X und Y. Ihre Firma bekommt im Laufe des Tages nach und nach Aufträge, die sie an X und Y verteilen müssen. Natürlich wissen Sie nichts von den Aufträgen, bevor sie eingehen. Der Auftrag A_i geht zur Zeit t_i ein und braucht Zeit w_i um bearbeitet zu werden und muss sofort zugeteilt werden. Ein Auftrag, der einmal zugeteilt wurde, kann dem Arbeiter nicht mehr weggenommen werden. Es ist Feierabend, wenn der letzte Arbeiter seinen letzten Auftrag fertig gestellt hat.
Eine einfache Strategie zum Verteilen der Aufträge ist es, den Auftrag immer dem Arbeiter zu geben, der augenblicklich weniger unerledigte Arbeit hat, also als erster fertig würde, kämen keine neuen Aufträge mehr rein. Eine solche einfache Strategie nennt man auch *Heuristik*.

a) Wie ordnet die einfache Strategie die Aufträge mit Arbeitsaufwand $w_1 = 10, w_2 = 20, w_3 = 10, w_4 = 30, w_5 = 40, w_6 = 20$ und Eingangszeit $t_i = i$ den Arbeitern zu?

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem ein hellseherischer Manager, der Aufträge optimal zuteilen kann, die Aufträge mindestens 1.49 mal schneller abarbeiten lässt, als ihre einfache Strategie.

c) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der erste Auftrag zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ kommt und dass die Auftragslage so gut ist, dass bei der einfachen Strategie beide Arbeiter stets zu tun haben. Nur am Schluss muss einer der beiden Arbeiter warten, bis auch der andere fertig ist. Sei $w_{\max} = \max_i w_i$ die längste Bearbeitungszeit eines Auftrags und sei $W = \sum_i w_i$ die Gesamtlänge der Aufträge.

[1] Ein Weg der Länge k ist eine Folge von Knoten $x_0, \ldots, x_k$, so dass sich keine zwei Knoten wiederholen und stets eine Kante zwischen aufeinanderfolgenden Knoten ist.

(a) Argumentieren sie, dass bei der einfachen Strategie spätestens um $W/2 + w_{\max}$ Feierabend ist. Hinweis: betrachten sie den Zeitpunkt, zu dem einem der beiden Arbeiter die Arbeit ausgeht. Wie lange muss dann der andere höchstens noch arbeiten? Wann geht einem der beiden spätestens die Arbeit aus?

(b) Argumentieren sie, dass beim hellseherischer Manager frühestens um $\max(W/2, w_{\max})$ Feierabend ist.

(c) Das Verhältnis der beiden Aufwände ist also höchstens

$$(W/2 + w_{\max})/ \max(W/2, w_{\max}).$$

Argumentieren Sie, dass dieses Verhältnis höchstens 2 ist.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)
Sie möchten alle ihre Freunde zu einer Party einladen. Da ihr Freundeskreis recht groß ist, verstehen sich nicht alle ihrer Freunde untereinander. Sie organisieren daher mehrere Partys. Um die Partys angenehm zu gestalten, wollen Sie nie zwei Personen zur gleichen Party einladen, die sich nicht mögen. Sie möchten rausfinden, ob es eine Lösung mit k Partys gibt.
Wir nehmen an, dass Sie wissen, welche Ihrer Freunde sich gegenseitig nicht mögen, und das „mögen" eine symmetrische Relation ist: A mag B genau dann wenn B auch A mag.

a) Formulieren Sie das Party-Problem als ein Problem auf Graphen und skizzieren Sie einen kleinen Beispielgraphen an, der Ihre Übersetzung erläutert.

b) Argumentieren Sie, dass dieses Problem in NP ist.

c) Nehmen Sie an, Sie können Graphen effizient mit der minimalen Zahl von Farben färben. Färben bedeutet, dass benachbarte Knoten verschiedene Farbe haben. Geben Sie ein Verfahren an, das das Party-Problem effizient löst.

Komplexität war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐